U_n et $\sqrt{8/3} \in [1,2]$

d'après le théoréme des inégalités des accroissements finis :

$$|f(U_n) - f(\sqrt{8/3})| \le \frac{2}{3}|U_n - \sqrt{8/3}|$$

$$\Rightarrow |U_{n+1} - \sqrt{8/3}| \le \frac{2}{3}|U_n - \sqrt{8/3}|$$

c) $|U_1 - \sqrt{8/3}| \le \frac{2}{3}|U_0 - \sqrt{8/3}|$

$|U_2 - \sqrt{8/3}| \le \frac{2}{3}|U_1 - \sqrt{8/3}|$

$|U_n - \sqrt{8/3}| \le \frac{2}{3}|U_{n-1} - \sqrt{8/3}|$

multiplions membre à membre et simplifions :

$$|U_n - \sqrt{8/3}| \le (\frac{2}{3})^n . |1 - \sqrt{8/3}|$$

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{2}{3})^n . |1 - \sqrt{8/3}| = 0$$

d'où $\lim_{x\to\infty}(U_n - \sqrt{8/3}) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} U_n = \sqrt{8/3}$$

EX 17 :

1) * $x = \frac{\sqrt[3]{3}\sqrt{27}\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{81}} = \frac{\sqrt[3]{3}\times 3\sqrt{3}\times\sqrt[3]{2^3}}{\sqrt[3]{3^4}}$

$= \frac{\sqrt[3]{3}\times 3\sqrt{3}\times 2}{3\sqrt[3]{3}} = 2\sqrt{3}$

* $y = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{32}} = \sqrt[3]{\frac{4}{32}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$

* $t = \sqrt[3]{8^2} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$

2) $A = \frac{\sqrt[3]{2^{10}}\times\sqrt{\sqrt{8^2}}\times\sqrt[5]{3^5\times 2^5}}{3\sqrt{2}\times\sqrt{\sqrt[3]{2^8}}} = \frac{2^3\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt{8}\times 3\sqrt[5]{2^5}}{3\sqrt{2}.\sqrt{2^2\times\sqrt[3]{2^2}}}$

$= \frac{8.\sqrt[3]{2}\times 2\sqrt{2}\times 3\times 2}{3\sqrt{2}.2\sqrt[6]{4}} = \frac{8\sqrt[3]{2}\times 2}{\sqrt[6]{4}} = \frac{16\times\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{\sqrt{4}}} = \frac{16\times\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = 16$

3) a) $(2+\sqrt{5})^3 = 2^3 + 3\times 2^2\sqrt{5} + 3\times 2\times(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^3$

$= 8 + 12\sqrt{5} + 30 + 5\sqrt{5} = 38 + 17\sqrt{5}$

b) $B = \sqrt[3]{38+17\sqrt{5}} - \sqrt[3]{38-17\sqrt{5}}$ ← *n'a* pas de sens car $38-17\sqrt{5} < 0$

EX 18 :

1) $\sqrt[3]{x} = \sqrt[4]{2} \Leftrightarrow x = (\sqrt[4]{2})^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{8}$

$S_{\mathbb{R}} = \{\sqrt[4]{8}\}$

2) $\sqrt[5]{x^2} = \sqrt[3]{3} \Leftrightarrow x^2 = (\sqrt[3]{3})^5 \Leftrightarrow x = \sqrt[6]{3^5}$ ou $x = -\sqrt[6]{3^5}$

$S_{\mathbb{R}} = \{\sqrt[6]{3^5}, -\sqrt[6]{3^5}\}$

3) $\sqrt[3]{x^2} - 3.\sqrt[3]{x} + 2 = 0$

dans $\mathbb{R}$:

$(E) \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x})^2 - 3.\sqrt[3]{x} + 2 = 0$

on pose $t = \sqrt[3]{x}$

l'équation devient : $t^2 - 3t + 2 = 0$

$t' = 1$ et $t'' = 2$

$t = 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$

$t = 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 2 \Leftrightarrow x = 8$

$S_{\mathbb{R}} = \{1,8\}$

4) $(1-\sqrt[4]{x})^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt[4]{x} - 1)^3 = 8$

$\Leftrightarrow \sqrt[4]{x} - 1 = 2 \Leftrightarrow \sqrt[4]{x} = 3 \Leftrightarrow x = 3^4 \Leftrightarrow x = 81$

$S_{\mathbb{R}} = \{81\}$

EX 19 :

a) $\lim_{x\to+\infty}(x^2 - x + 1) = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

d'où $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{(x^2 - x + 1)} = +\infty$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2 + x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x+1}{\frac{\sin x}{x}} = 1$

d'où $\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{x^2+x}{\sin x}} = \sqrt[3]{1} = 1$

c) $\lim_{x\to+\infty} x - \sqrt[3]{x} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}.\left[\sqrt[3]{x^2} - 1\right] = +\infty$

Oarray.tn - Aqra Blech - Oarray.tn